

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ПО ПРОВЕЖДАНЕТО НА VIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА
ПО АСТРОНОМИЯ

IV КРЪГ
15 юли 2005 г., гр. Стара Загора

Ученици старша възраст

1 задача. За младия астроном Жельо Желев, от всички космически обекти, принадлежащи към Слънчевата система, най-интересни са метеорните тела. Той си задава въпроса колко бърз може да е най-бързият метеор.

Опитайте се да пресметнете възможно най-точно максималната скорост, с която метеорно тяло може да навлезе в земната атмосфера. При какви условия, кога и къде такова метеорно тяло може да предизвика най-бърз метеор? Пресмятанятия направете, като отчетете всички фактори. Съпротивлението на въздуха да се пренебрегне.

Решение: Едно метеорно тяло би имало максимална линейна скорост относно Земята, ако в момента на срещата му с нашата планета са изпълнени следните условия:

1) Тялото се движи относно Слънцето с максималната възможна скорост. На разстояние от Слънцето, равно на разстоянието r до Земята, това е параболичната скорост:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}}$$

където M е масата на Слънцето. Тя би била най-голяма на най-малко разстояние до Слънцето, т.е. когато Земята е в перихелий. Тогава:

$$v_P = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0(1-e)}}$$

където r_0 е средното разстояние от Земята до Слънцето, равно на една астрономическа единица, а e е ексцентрицитетът на земната орбита.

2) Тялото трябва да се движи в посока обратна на орбиталното движение на Земята, което се извършва със скорост:

$$v_3 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0} \cdot \frac{1+e}{1-e}}$$

При това скоростта на метеорното тяло относно Земята ще е:

$$v_M = v_P + v_3.$$

Но докато пада към Земята, метеорното тяло ще изпитва нейното гравитационно въздействие и ще се ускори допълнително до скорост v_M' . За да я намерим, използваме закона за запазване на енергията на метеорното тяло. На голямо разстояние от Земята неговата енергия ще се определя само от кинетичната енергия на движение със скорост v_M , а в момента, когато навлезе в земната атмосфера, енергията му ще бъде сума от кинетичната енергия на движение със скорост v_M' и потенциалната енергия в близост до земната повърхност. Тогава:

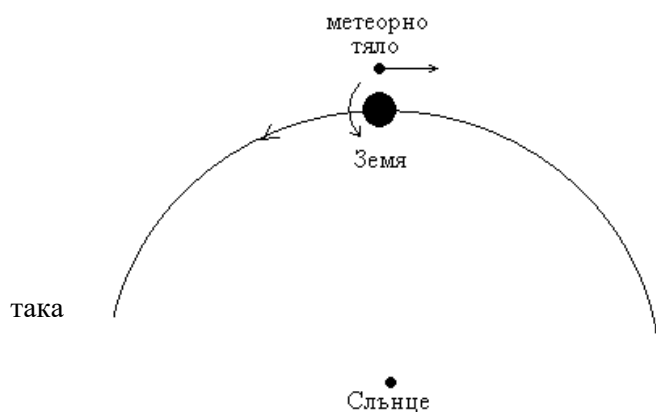
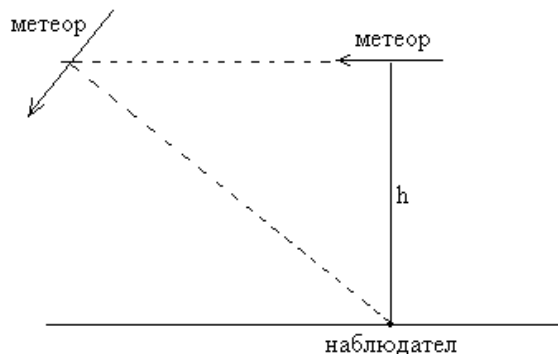
$$\frac{v_M^2}{2} = \frac{v_M'^2}{2} - \frac{\gamma M_3}{R}$$
$$v_M' = \sqrt{v_M^2 + \frac{2\gamma M_3}{R}}$$

Окончателно получаваме:

$$v_M' = \sqrt{\left(\sqrt{\frac{2\gamma M}{r_0(1-e)}} + \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0} \cdot \frac{1+e}{1-e}} \right)^2 + \frac{2\gamma M_3}{R}}$$

$$v_M' = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_0(1-e)} (\sqrt{2} + \sqrt{1+e})^2 + \frac{2\gamma M_3}{R}}$$

$$v_M' \approx 73.82 \text{ km/sec}$$



За да бъде видимата ъглова скорост на метеора максимална, той трябва да е в зенита на наблюдателя. В противен случай метеорът би се появил на по-далечно линейно разстояние от наблюдателя и ъгловата му скорост би била по-малка. Метеорът трябва да е ориентиран успоредно на земната повърхност, т.е. радиантът му трябва да е на хоризонта. Иначе наблюдателят би виждал проекция на метеора и съответно по-малка ъглова скорост.

Най-бърз метеор би се видял в полунощ над екватора. Тогава към неговата скорост би се добавила и линейната скорост на въртене на екваториална точка от земната повърхност. Тя е около 0.5 km/sec, така че скоростта на метеора би надвишила 74 km/sec. Не е нужно да отчитаме наклона на екватора към еклиптиката, защото времето от годината трябва да е около преминаването на Земята през перихелия. Това е близо до лятното слънцестоене, когато в полунощ за наблюдател на земния екватор метеорът в зенита би трябвало да се движи успоредно както на еклиптиката, и на небесния екватор.

Ако наблюдаваме по-бърз метеор от този, то бихме направили извода, че той се предизвиква от метеорно тяло, което не принадлежи на Слънчевата система, а идва от междузвездното пространство и се

движи относно Слънцето по хипербола със скорост по-голяма от параболичната скорост.

2 задача. Движението на Земята, заедно с нашата Галактика, спрямо реликтовия фон създава така наречената диполна анизотропия на реликтовото излъчване.

Поради влиянието на ефекта на Доплер, по посока на апекса температурата на излъчването е малко по-висока, отколкото в противоположна посока. Разликата в температурите по посока на апекса и антиапекса е $\Delta T = 1.08 \times 10^{-2} \text{ K}$. Имайки предвид това, определете скоростта на Земята спрямо реликтовия фон. Средната температура на реликтовото излъчване считайте за $T = 2.7 \text{ K}$.

Решение: Нека ΔT е разликата в температурите, а T е средната температура на реликтовото излъчване. Използваме закона на Вин за положението на максимума на излъчване по дължина на вълната на абсолютно черно тяло. В общия случай:

$$\lambda = \frac{0.29}{T} [\text{cm}]$$

За областите на апекса и антиапекса можем съответно да напишем:

$$\lambda_1 = \frac{0.29}{T + \frac{\Delta T}{2}} [\text{cm}]$$

$$\lambda_2 = \frac{0.29}{T - \frac{\Delta T}{2}} [\text{cm}]$$

Скоростта на Земята v можем да получим по доплеровото отместване на дължината на вълната на максимума на излъчване в апекса (или в антиапекса) относно максимума на излъчване при средната температура:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2} = \frac{0.29 \times 2\Delta T}{4T^2 - \Delta T^2}$$

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

където c е скоростта на светлината. Накрая получаваме:

$$v = \frac{2cT\Delta T}{4T^2 - \Delta T^2} = 600 \text{ km/sec}$$

Константата на Вин (0.29) се съкращава, поради което числената стойност и размерността на резултата зависи единствено от размерността на скоростта на светлината.

3 задача. Да предположим, че всички звезди имат еднаква светимост. Определете отношението k на броя на звездите със звездна величина по-малка или равна на $m+1$, към броя на звездите със звездна величина по-малка или равна на m , които бихме виждали по цялото небе. Разгледайте следните случаи:

- 1) Звездите са равномерно разпределени в пространството.
- 2) Звездите са равномерно разпределени в плосък слой. Наблюдателят се намира също в слоя.

Таблицата съдържа данни за общия брой звезди със звездна величина по-малка или равна на дадена звездна величина, които действително се виждат на небето. Разгледайте я внимателно и дайте обяснение за разпределението на звездите до различни звездни величини.

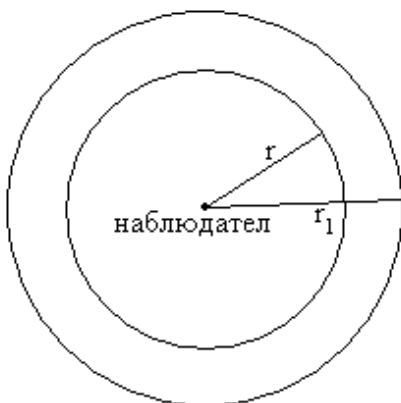
Звездна величина	Общ брой	Звездна величина	Общ брой	Звездна величина	Общ брой
0	3	5	1466	10	380200
1	11	6	4732	11	1026000
2	39	7	15000	12	2588000
3	133	8	46240	13	5894000
4	446	9	139300	14	13120000

Решение: Нека r и r_1 са разстоянията, на които видимите звездни величини на звездите са съответно m и $m+1$, а освеностите, които те създават, са E и E_1 .

$$\frac{E}{E_1} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^2 = 2.512$$

$$\frac{r_1}{r} = \sqrt{2.512} \approx 1.58$$

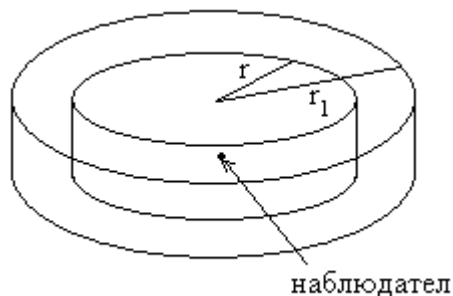
I случай.



Всички звезди със звездна величина, по-малка или равна на m , са разположени в сферичен обем с радиус r . Означаваме общият им брой с N . Аналогично с N_1 означаваме броя на звездите със звездна величина $m+1$, разположени в сферичен обем с радиус r_1 . Тъй като звездите са равномерно разпределени, то търсеното отношение е:

$$k' = \frac{N_1}{N} = \frac{\frac{4}{3}\pi r_1^3}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \left(\frac{r_1}{r}\right)^3 \approx 3.9$$

II случай.



Звездите със звездна величина, по-малка или равна на m , са разположени в диск с радиус r , който е част от плоския слой с дебелина h . Звездите със звездна величина не по-голяма от $m + 1$, са разположени в диск с радиус r_1 . Тогава отношението е:

$$k'' = \frac{N_1}{N} = \frac{\pi r_1^2 h}{\pi r^2 h} = \left(\frac{r_1}{r} \right)^2 \approx 2.5$$

От таблицата виждаме, че с нарастване на звездната величина отношението k се изменя плавно от около 3.7 до 2.5. Това означава, че звездите в близките околности на Слънцето са почти равномерно разпределени в пространството, но при по-далечните звезди все по-отчетливо се проявява разпределението им в диска на Галактиката.

4 задача. На снимка 1 се вижда Луната веднага след окултацията на Сатурн от нея. Ако ъгловият диаметър на Луната е $31'$, радиусът на орбитата на Сатурн е 9.555 AU, определете радиуса на пръстените на Сатурн в километри. Една астрономическа единица е 149.6 милиона километра. За по-точно определяне на радиуса на пръстените можете да използвате снимка 2.



Снимка 1



Снимка 2

Решение: Виждаме, че Сатурн е по посока на Луната. Следователно ъгълът на направлението към Сатурн спрямо направлението към Слънцето е същият, както и за Луната. Фазовият ъгъл на Луната може да се пресметне от фазата на Луната. Нека пренебрегнем ъгловите размери на Луната, гледана от Земята, и ъгловите размери на системата Земя-Луна, гледана от Слънцето. Построяваме точка Т, която се намира едновременно на терминатора и на екватора на Луната. Нека точка Q е центърът на лунния диск, а Q' е на десния край на лунния диск и лежи на екватора. Нека означим $QT = y$ $TQ' = x$. На Фиг. 3 ОА е направлението към Земята, а АТ е направлението към Слънцето. Тогава $\angle OAT = \varphi$ е фазовият ъгъл на Луната. От $\triangle SAT$ и $\triangle OTS$ следва, че $\angle SAT = \angle STO = \varphi$, като ъгли с взаимно перпендикулярни рамене. ОТ е радиусът на Луната и следователно $OT = x + y$. Триъгълник ОТС е правоъгълен и следователно $\cos \varphi = \frac{y}{x + y}$. От измерванията на снимка 1

получаваме $y = 42 \text{ mm}$ и $x + y = 57 \text{ mm}$. Тогава $\varphi = 42^\circ.5$.

(При прецизно построяване на схемата на Луната, гледана от северния полюс с направлението към Земята и Слънцето, можем да получим този ъгъл графично. Измерваме и получаваме $\varphi = 42^\circ$, което е в много добро съгласие с изчислената стойност за φ .)

На фиг. 4 правим принципна схема на орбитите на Земята и Сатурн. Направлението Земя-Сатурн е на ъгъл φ от направлението към Слънцето. Нека h е отсечка, спусната перпендикулярно от Слънцето към направлението Земя-Сатурн. Тя разделя отсечката Земя-Сатурн на две части – n и m , като $r = n + m$, където r е разстоянието Земя-Сатурн. От Фиг. 4 виждаме, че $h = r_3 \sin \varphi$, където $r_3 = 1 \text{ AU}$ е разстоянието от Земята до Слънцето, а $n = r_3 \cos \varphi$ и следователно $m = \sqrt{r_3^2 - h^2} = \sqrt{r_3^2 - r_3^2 \sin^2 \varphi}$. Оттук следва, че $r = n + m = r_3 \cos \varphi + \sqrt{r_3^2 - r_3^2 \sin^2 \varphi}$. Остава да намерим ъгловия размер на пръстените на Сатурн. Връщаме се към снимка 1 и снимка 2. Нека:

- D е диаметърът на пръстените на Сатурн в километри;
- d е ъгловият диаметър на пръстените на Сатурн в радиани;
- d'' е ъгловият диаметър на пръстените на Сатурн в дъгови секунди;
- d_1 е диаметърът на пръстените на Сатурн в милиметри на снимка 1.

На снимка 1 обаче изображението на Сатурн е много малко, затова измерванията правим на снимка 2. За размера на пръстените на Сатурн получаваме $d_2 = 5 \text{ mm}$. Измерваме и размерите на по-голям кратер на снимка 2 – $d_{k2} = 12.2 \text{ mm}$. На снимка 1 размерът на същия кратер е $d_{k1} = 6 \text{ mm}$. Следователно $d_1 = d_2 \frac{d_{k1}}{d_{k2}} = 2.46 \text{ mm}$.

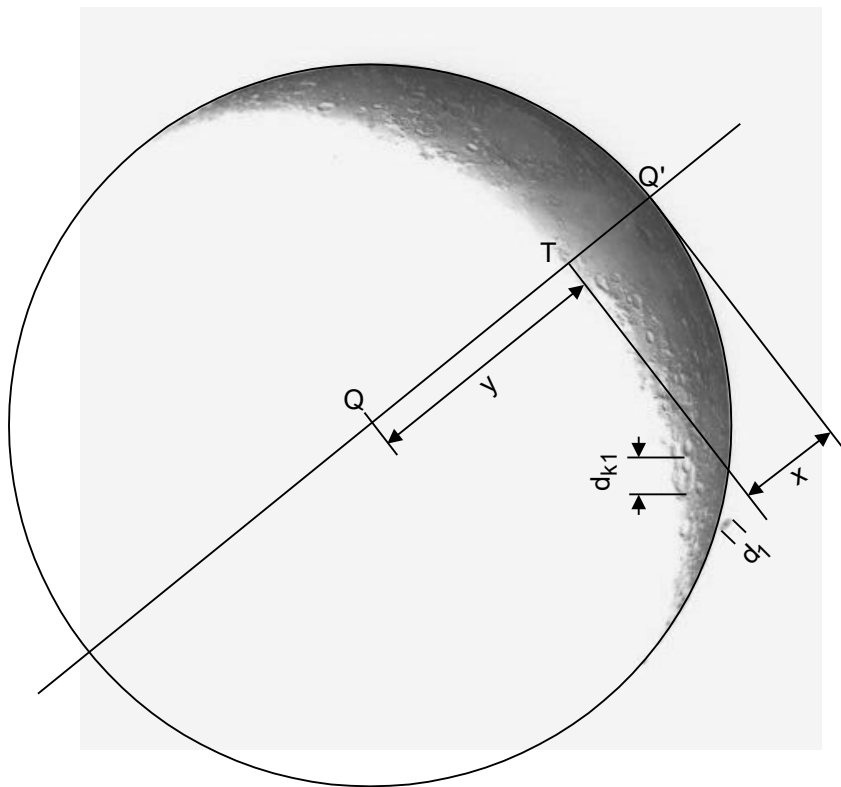
Измерваме върху снимка 1 диаметъра на Луната и получаваме $d_L = 115 \text{ mm}$. Диаметърът на Луната в дъгови минути $d_L' = 31'$ е известен от условието на задачата. Тогава за пръстените на Сатурн получаваме:

$$d'' = 60 d_L' \frac{d_1}{d_L} = 39.8''$$

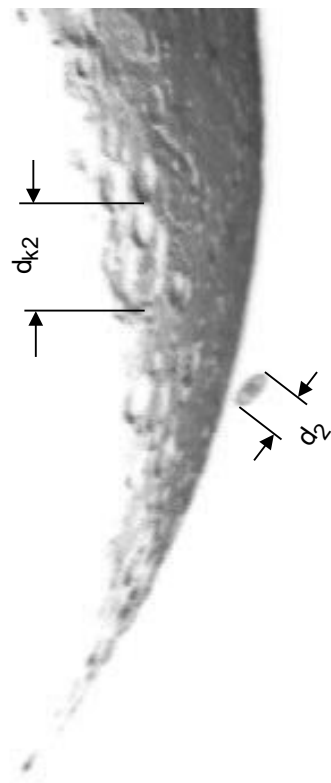
Накрая за радиуса на пръстените на Сатурн получаваме:

$$R = \frac{1}{2} D = \frac{d''}{2 \times 206265} \left(r_3 \cos \varphi + \sqrt{r_C^2 - r_3^2 \sin^2 \varphi} \right) = 150000 \text{ km}$$

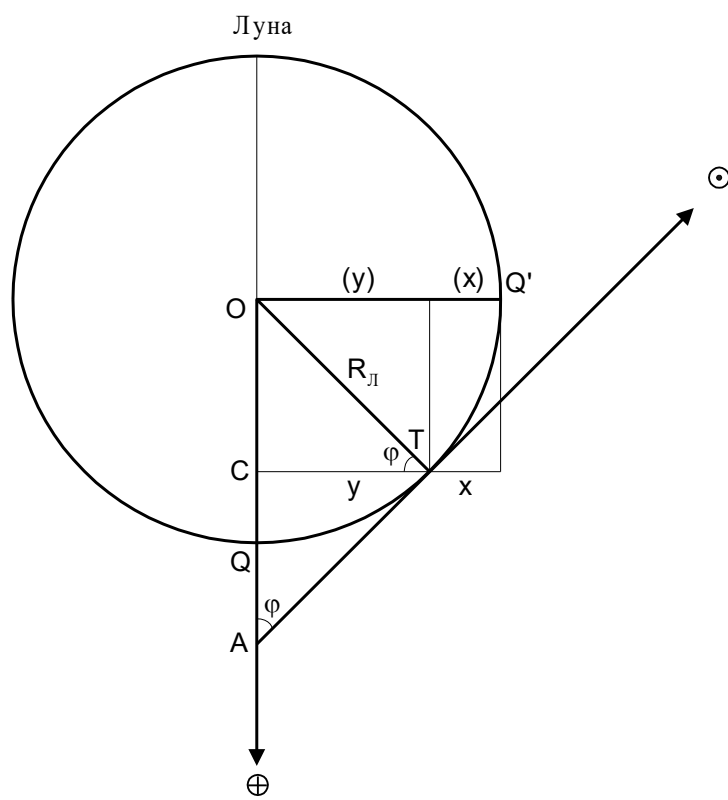
което е добра оценка за видимия с малък телескоп размер на пръстените.



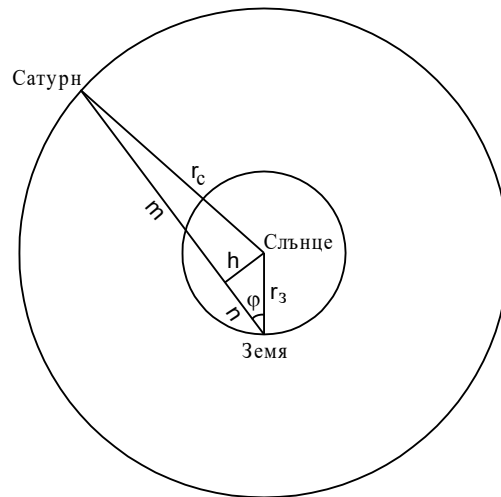
Снимка 1



Снимка 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Справочни данни:

Маса на Слънцето $2 \times 10^{30} \text{ kg}$

Маса на Земята $6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Гравитационна константа $\gamma = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 / \text{kg} \cdot \text{sec}^2$

Ексцентрицитет на земната орбита $e = 0.017$